

Măsurarea impedanțelor

Reprezentări

- forma carteziană: $Z = R + jX$
- forma polară: $Z = |Z|e^{j\varphi_Z}$

unde:

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi_Z = \arctg \frac{X}{R}$$

- caracteristici ale impedanțelor:
 - **natura**, dată de semnul componentei imaginare:
 $X > 0$ natură **inductivă**, $X < 0$ natură **capacitivă**, $X = 0$ natură **rezistivă**
 - **modelul**: serie sau paralel

Modele

- Modelul **serie**: se preferă reprezentarea Z:

$$Z = R + jX \quad \begin{array}{c} R_s \quad jX_s \\ \text{---} \text{---} \end{array}$$

- Modelul **paralel**: se preferă reprezentarea Y:

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB = |Y|e^{j\phi_Y} \quad \begin{array}{c} R_p \\ \text{---} \\ jX_p \\ \text{---} \end{array}$$

Conversii între modele

- Ambele modele (serie sau paralel) “modelează” corect impedanța

→ valoarea Z este aceeași:

$$\frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p} = \frac{1}{R_s + jX_s} \quad \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2}$$

- relații de echivalență:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

- **Concluzie**: cunoscînd elementele unui model (s/p) se pot determina elementele celuilalt model (p/s)

Factorul de calitate

- Pe baza puterilor activă/reactivă disipate în impedanță:

$$Q = \frac{|P_r|}{P_a}$$

- Q mare: efect predominant reactiv (inductiv/capacitiv)
- Q mic: efect predominant rezistiv (pierderi mari)
- Reciproc: factorul de pierderi:

$$D = \frac{1}{Q}$$

- sau: unghiul de pierderi:

$$\delta = \arctg \frac{1}{Q} = \arctg D$$

Factorul de calitate (cont'd)

- Modelul serie: I prin R_s și X_s este același:

$$\left. \begin{aligned} |P_r| &= \frac{1}{2} |X_s| I^2 \\ P_a &= \frac{1}{2} R_s I^2 \end{aligned} \right\} \boxed{Q_s = \frac{|X_s|}{R_s}} \quad \begin{array}{c} R_s \quad jX_s \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array}$$

- Modelul paralel: U la bornele R_p și X_p este aceeași:

$$\left. \begin{aligned} |P_r| &= \frac{1}{2} \frac{U^2}{|X_p|} \\ P_a &= \frac{1}{2} \frac{U^2}{R_p} \end{aligned} \right\} \boxed{Q_p = \frac{R_p}{|X_p|}} \quad \begin{array}{c} R_p \\ \text{---} \\ jX_p \\ \text{---} \end{array}$$

Factorul de calitate (cont'd)

- Relația $Q_s \leftrightarrow Q_p$?
- Rescriem relațiile de echivalență:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

- Obs: $R_p/X_p = X_s/R_s$
 $\rightarrow Q_p = Q_s$
- **Q: rezultat așteptat ?**
- **Hint: este vorba de 2 modele diferite ale **aceleiași** componente, al cărui model poate fi necunoscut !**
- Q este o mărime cu semnificație fizică (vezi. def)
- $Q_s = Q_p = Q$

Conversii între modele (revisited)

- relațiile de echivalență:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s}$$

- pe baza def. Q:

$$\begin{cases} R_p = R_s (1 + Q^2) \\ X_p = X_s \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) \end{cases}$$

Conversii – cazuri particulare

- pt. **Q mare** (suficient $Q > 10$)

$$\begin{cases} R_p \cong R_s Q^2 \\ X_p \cong X_s \end{cases}$$

→ se conservă reactanța între modele

- pt **Q mic**:

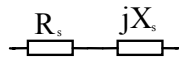
$$\begin{cases} R_p \cong R_s \\ X_p \cong \frac{X_s}{Q^2} \end{cases}$$

→ se conservă rezistența între modele

Modele (revisited)

- Modelul s/p poate fi **fizic** sau **echivalent**
- Modelul **fizic**: valorile R, X corespund unor mărimi fizice reale

Ex: bobină reală = bobină ideală + rezistența sîrmei



X_s corespunde ωL , R_s corespunde rez. sîrmei

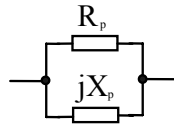
$$Z = R_s + j\omega L$$

- Avantaj folosire model fizic:
valorile numerice corespund valorilor așteptate
Ex: R_s = rezistența sîrmei = rezistență **mică**

Modele (cont'd)

- Modelul **echivalent**: nu corespunde unor mărimi fizice reale

Ex. Bobină reală modelată prin:

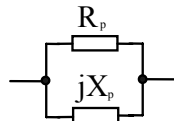


$$1/Z = 1/R_p -j/\omega L$$

- Q: De ce se folosește ?
- A:
 - structura fizică nu e întotdeauna cunoscută (“cutie neagră”)
 - modelul echivalent “modelează” la fel de bine componenta fizică
- Dezavantaj: valorile numerice nu corespund valorilor fizice așteptate (dacă acestea se cunosc)

Modele (cont'd)

- Ex: folosirea modelului echivalent (paralel) la bobină:



calc. $R_p = R_s(1 + Q^2)$ pe baza R_s și Q reale

- R_s (fizic) mic – rezistența sîrmei
- Q mare $\rightarrow R_p$ (echivalent) mare \rightarrow nu corespunde cu realitatea
- (realitatea = măsurarea rezistenței bobinei la ohmetru)

Observații:

- modelul e în continuare corect matematic
- unele impedanțe (combinații multiple serie-paralel) nu corespund unui anumit model fizic simplu s sau p \rightarrow oricare model e la fel de bun

Impedanțe parazite

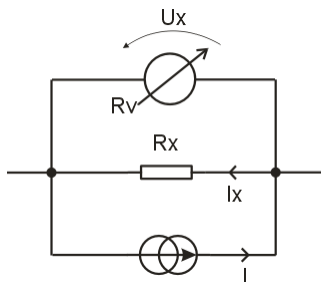
- apar pe lângă impedanța “reală” necunoscută
- nu sînt constante – depind de forma, poziția și modul de conectare al impedanței în circuit
- ex: apropierea mîinii operatorului, strîngerea unor borne cu șurub etc.

Clasificare:

- impedanțe parazite mici:
 - model: serie cu impedanța necunoscută
 - uzual: rezistențe de contact, rezistențele terminalelor, rezistențele cablurilor de măsura
- impedanțe parazite mari:
 - model: paralel
 - uzual: rezistențe de izolație, de scurgere, de pierderi, capacități parazite

Măsurarea impedanțelor mici

- Z_x / R_x mici:
- impedanțele parazite mici (serie) nu sînt neglijabile
- putem neglija impedanțele parazite mari (paralel)
- Aplicație: măsurarea indirectă a R prin injectare de curent

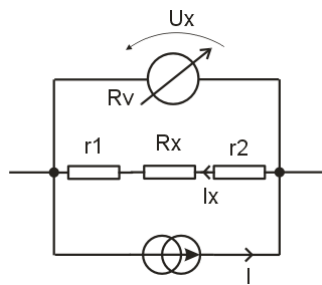


- $I_x = I$ căci $R_v \rightarrow \infty$
- $R_x = U_x / I_x$

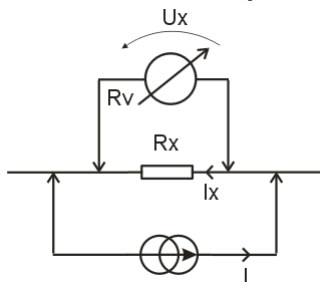
Măsurarea impedanțelor mici (cont'd)

- R_x mică
- r_1, r_2 rezistențele terminalelor + contactelor
- doar două borne de conectare la $R_x \rightarrow$ nu se pot separa
 $\rightarrow U_x = I_x(r_1 + R_x + r_2)$

Q: Să se calculeze eroarea sistematică comisă la această măsurătoare

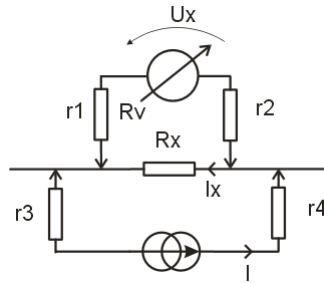


Conexiunea cuadripolară (4T)



- Idee: separarea bornelor de curent (2) și tensiune (2)
- 2+2 =4 fire **separate** către R_x
- **Regulă:** punem în evidență rezistența de contact/rezistența terminalului în serie cu **fiecare** bornă care ne conectează la R_x (include toate impedanțele parazite serie din acel punct)
- Contacte ascuțite: contacte “cuțit” (Kelvin)
- **Redesenați schema cu cele 4 rezistențe !**

Conexiunea cuadripolară (4T) (cont'd)



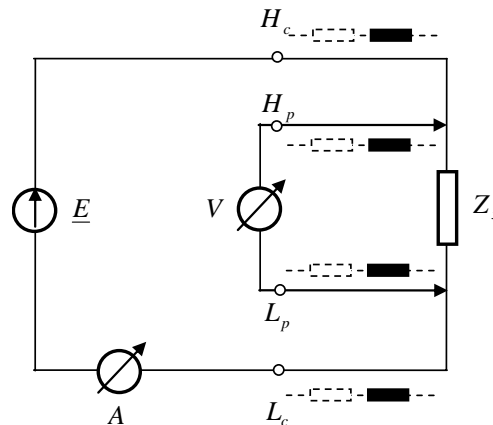
- Idee: punerea r_i **în serie** cu alte impedanțe **mari** a.î. să devină neglijabile
- $r_{1,2} \ll R_v$ $r_{1,2}$ serie R_v
- $r_{3,4} \ll R_{\text{sursă curent}}$ $r_{3,4}$ serie $R_{\text{sursă curent}}$
- căderea de tensiune pe $r_{3,4}$ există dar nu intervine

$$\rightarrow U_x = R_x I_x$$

eroare sistematică: 0

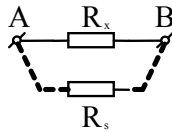
Aplicație: punte de măsură 4T

- vezi puntea din laborator
- în c.a. \rightarrow LCR-metru (măs. Z_x)
- 4 borne:
 - Hc = High Current
 - Hp = High Potential (Voltage)
 - Lp = Low Potential (Voltage)
 - Lc = Low Current
- Hc, Lc injectează curent în Z_x
- Hp, Lp măsoară tensiunea pe Z_x
- Schema: vezi curs IEM an 3
- în c.c. elimină ef. r_{serie} fire măsură, contacte
- în c.a. elimină și ef. **inductanței** firelor de măsură



Măsurarea impedanțelor mari

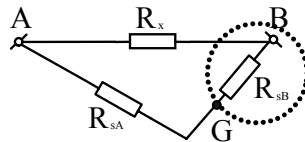
- Z_x / R_x mari:
- impedanțele parazite mari (paralel) nu se pot neglija
- se pot neglija impedanțele parazite mici (serie)
- $R_S \parallel R_x$ între bornele A,B
- $R_S = \text{zeci...sute } M\Omega \dots G \Omega$



- Q: să se calculeze eroarea sistematică la măsurarea R_x

Măsurarea impedanțelor mari (cont'd)

- Soluție: **inel de gardă** în jurul unei borne
- Efect: R_s divizat în $R_{sA} + R_{sB}$
- pînă aici nimic nou; $R_{sA} + R_{sB}$ în continuare $\parallel R_x$



- 3 borne (A,B,G) → configurație **tripolară** (3T)

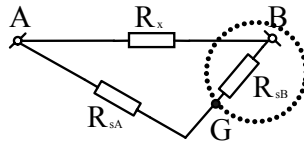
Conexiunea tripolară (3T)

- *memento*: idee 4T:

“punerea r_{contact} **în serie** cu alte impedanțe **mari** a.î. să devină neglijabile”

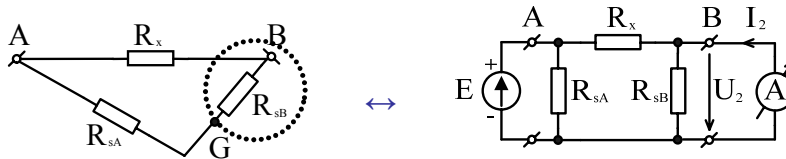
- idee 3T:

punerea $R_{sA,B}$ **în paralel** cu alte impedanțe **mici** a.î. să devină neglijabile



Conexiunea tripolară (3T) (cont'd)

- Aplicație: măsurarea R_x (mari)
- Borna G se leagă la **masă**



- $R_x \ll R_{sA,B} \rightarrow I_{A,B} \ll I_x \rightarrow I_2 \approx I_x$
- $U_2 \approx 0$ ($R_{\text{ampermetru}} \approx 0$) $\rightarrow E = U_x + U_2 \approx U_x$
- $R_x = -U_1/I_2 = -E/I_2$

• $R_{sA} \parallel R_{\text{sursă tensiune}}$ dar $R_{sA} \gg R_{\text{sursă tensiune}}$

• $R_{sB} \parallel R_{\text{ampermetru}}$ dar $R_{sB} \gg R_{\text{ampermetru}}$

\rightarrow efect $R_{sA,B}$ neglijabil prin punerea în \parallel pe impedanțe **mici**

Aplicație: punte de măsură 3T

- Q: se văd 2 borne, unde e a 3-a ?

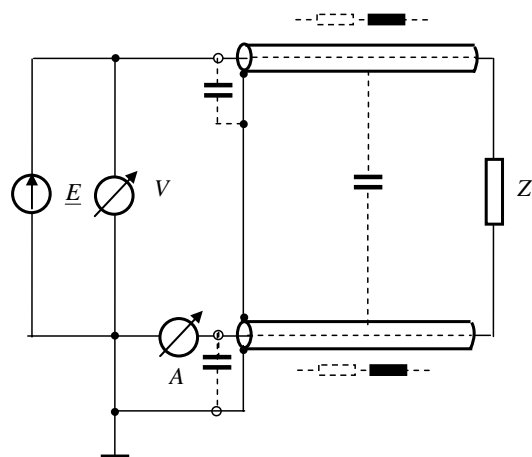
- A: ecranul cablului coaxial !

- R_S în c.a. : $Z_s =$ capacitatea parazită C_p (de val. mică \rightarrow impedanță mare)

- obs. $C_p \parallel$ 2 puncte de potențial egal (2 borne de masă) \rightarrow efect eliminat

- fără ecran $\rightarrow C_p \parallel Z_x \rightarrow$ nu mai e neglijabil la Z_x mari

- Extindere: $4+3 = 5$???
- $4T+3T = 5T$ (pentapolar)
- 4 cabluri ecranate, ecrane comune = 5 borne !



Măsurarea impedanțelor prin metoda punții echilibrate (*balanced bridge*)

Rezumat:

A. în c.c. \rightarrow puntea Wheatstone

B. în c.a. :

\rightarrow 8 tipuri de punți bazate pe puntea Wheatstone

\rightarrow punți cu transformator

C. punți active

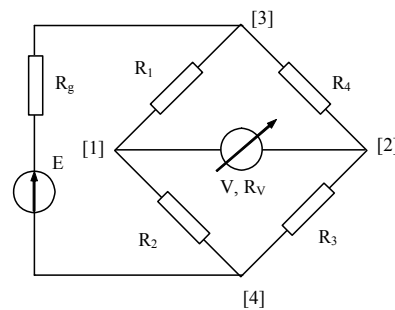
De ce punți ?

- puntea – cea mai sensibilă metodă de măsură
- egalitatea $R_x=R_e$ (sau $Z_x=Z_e$) se determină la echilibrul punții
- rezoluția = abilitatea de a detecta tensiuni de dezechilibru oricît de mici
- aplicații:
 - punți de măsură pentru R,L,C cu echilibrare manuală și automată
 - senzori și traductoare

A. Puntea Wheatstone de c.c.

$$R_g \rightarrow 0$$

$$R_v \rightarrow \infty$$



- Principiul punții **echilibrate**: $U_{12} = U_d = 0$ (d=**dezechilibru**)
- Voltmetrul: indicator de nul;
- *remember galvanometrul magnetoelectric cu 0 la mijloc?*
- Relația de echilibru: $U_1=U_2$
 $\rightarrow R_1 R_3 = R_2 R_4$
- **Demonstrație !**

Puntea Wheatstone (cont'd)

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

- notăm $R_4 = R_{4x} = R_x$
- putem nota și:

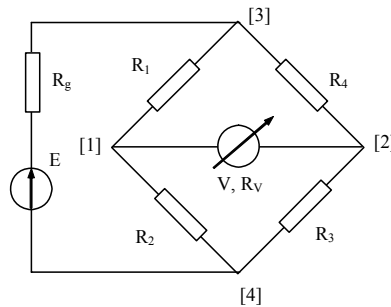
$$R_3 = R_e$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 10^{\pm n}$$

$$\rightarrow R_x = 10^{\pm n} R_e$$

- $10^{+/-n}$ reglaj **decadic** → schimbă **scara** de măsură
- R_e reglaj **continuu** → **valoarea** în cadrul scării

Puntea Wheatstone (cont'd)



- **Q:** putem schimba poziția voltmetrului cu a sursei ?
- **A:** da și nu !!!
- **da:** d.p.d.v. al relației de echilibru $R_1 R_3 = R_2 R_4$
- **nu:** d.p.d.v. al sensibilității
- **memento:** sensibilitatea $S = ?$

Sensibilitatea punții Wheatstone

- Sensibilitatea $S = \Delta \text{ieșire} / \Delta \text{intrare}$

- la noi: $S = \frac{\Delta U_d / E}{\Delta R_4 / R_4}$

- se obține $S = \frac{A}{(1+A)^2}$

(cu notația $R_3/R_4=A$)

Demonstrație!

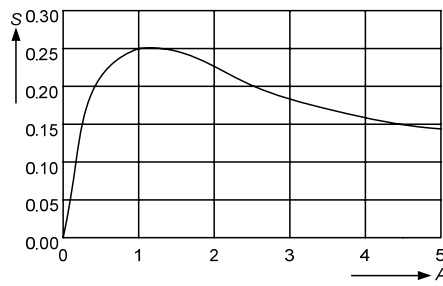
Sensibilitatea punții Wheatstone (cont'd)

$$S = \frac{A}{(1+A)^2}$$

- dorim $S=\max$; $S=f(A)$
 $\rightarrow dS/dA = 0$

- se obține pentru $A = 1$ $S_{\max} = \frac{1}{4}$

Demonstrație !



Sensibilitatea punții Wheatstone (cont'd)

Consecințe:

- 1) $A \leftrightarrow 1/A$; puntea nu cunoaște sensul “gravitației”
→ **demonstrăm că $S(A)=S(1/A)$**
→ A = raportul *oricăror* 2 rezistențe care mărginesc V-metrul!
 $A = R_1/R_2=R_4/R_3$ sau $A = R_2/R_1= R_3/R_4$ dar nu R_2/R_3 !
- 2) $A=1$ → scara decadică cea mai sensibilă este pt. $n=+/-1$
→ la măsurarea R_x f. mici/mari S scade
→ **motiv** suplimentar pentru care p. Wheatstone nu e indicată pentru R_x de valori extreme
Q: ce alte motive ?
A: conexiune 2T și nu 3T/4T/5T !!!

Sensibilitatea punții Wheatstone (cont'd)

- Sensibilitatea S_0 în jurul echilibrului (la ech.: $R_1R_3=R_2R_4$)

$$R_4 = \underbrace{R_{40}} + \Delta R_4 \quad \Delta R_4 \ll R_{40}$$

$$U_d = 0 + \Delta U_d = \Delta U_d$$

- S_0 devine:
$$S_0 = \frac{\frac{U_d}{E}}{\frac{\Delta R_4}{R_{40}}} = \frac{A}{(1+A)^2}$$

$$\rightarrow U_d = ES_0 \frac{\Delta R_4}{R_{40}}$$

notăm $\sigma = \Delta R/R_{40}$ (s.n. dezechilibrul punții)

Sensibilitatea punții Wheatstone (cont'd)

- $\sigma = \Delta R/R_{40}$
- $U_d = S \cdot \sigma \cdot E$
- observăm $\sigma = \Delta R/R_{40}$ similar cu $\varepsilon = \Delta R/R_{\text{adevărat}}$
- $\sigma \leftrightarrow$ eroare \leftrightarrow eroare de prag de sensibilitate = ε_{PS}
- Q: ce factor cauzează ε_{PS} ?
- A: $U_d < U_{\min}$ (citibil pe afișajul/scara voltmetrului)

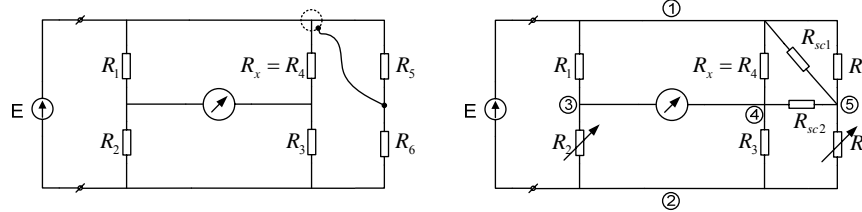
$$\text{înlocuim} \rightarrow \varepsilon_{ps} = \frac{U_{\min}}{S_0 E}$$

Puntea Wheatstone (cont'd)

- **Aplicație 1:**
calculați ε_{PS} a unei punți știind că se folosește un voltmetru numeric cu $U_{CS}=2V$ (afișaj maxim 1.999V, numit și afișaj cu **3 ½ cifre**)
Se mai dau: $E=10V$, $R_1=R_2=1K$
- **Aplicație 2:**
Calculați eroarea relativă limită la măsurarea cu puntea precedentă, dacă toleranțele rezistențelor sînt $\varepsilon_{1,2}=1\%$ și $\varepsilon_3=0.1\%$
(Hint: aplicație a conceptelor de eroare limită și a formulei de propagare a erorii la măsurătorile indirecte)

Puntea Wheatstone (cont'd)

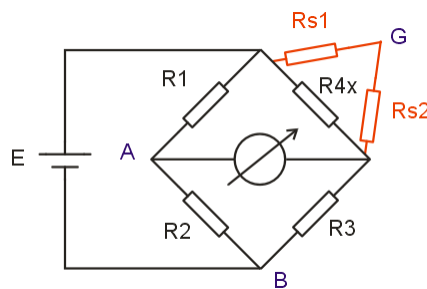
- **Aplicație 3:** puntea Wagner



- punte în conexiune 3T
- 2 faze:
 - faza 1: v-metrul între 4-5, echilibrare din R_6
Q1: la ce este utilă această fază?
 - faza 2: v-metrul între 3-4, echilibrare din R_2 sau R_3 (punte clasică)
- Q2: Să se determine condițiile de echilibru și modul de funcționare
- Q3: redeseñați schema pentru a funcționa în c.a.

Puntea Wheatstone (cont'd)

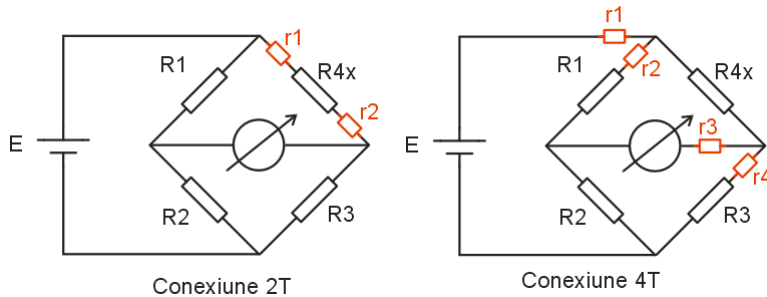
- **Aplicație 4:** puntea Wheatstone în configurație 3T



- să se calculeze eroarea sistematică dacă borna G rămîne în aer
 - să se determine modul optim de conectare al bornei G
- Se dau $R_1 = 100\text{K}$ $R_2 = 10\text{K}$ $R_3 = 1\text{M}\Omega$ $R_{s1}, R_{s2} = 100\text{M}\Omega$

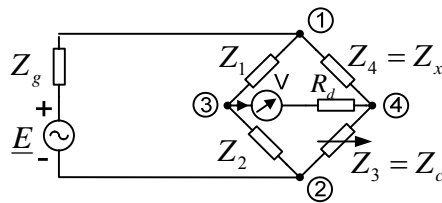
Puntea Wheatstone (cont'd)

- **Aplicație 5:** puntea Wheatstone în configurație 4T



- să se argumenteze poziția și efectul rezistențelor de contact
 - să se calculeze eroarea sistematică în conexiune 2T
 - să se calculeze eroarea sistematică în conexiune 4T
- Se dau: $R_1=100 \Omega$ $R_2=1K$ $R_3=10\Omega$ $r_1..r_4= 0.1 \Omega$

B. Punți de c.a.



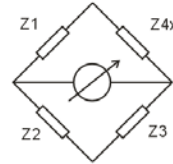
- $Z_1..Z_4$ complexe
- relația de echilibru: $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$
- se traduce în 2 relații de echilibru:

$$\begin{cases} |Z_1| |Z_3| = |Z_2| |Z_4| \\ \varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2 + \varphi_4 \end{cases}$$

- satisfacere simultană: necesită 2 elemente reglabile (față de 1 la c.c.)

Punți de c.a. (cont'd)

- $Z_1 \dots Z_4$ pot fi oricum (model s/p, natură L/R/C)
- **Q:** se poate face o punte cu orice combinație de $Z_{1..4}$?
- **A:** trebuie respectate 2 condiții:



1. condiția de **convergență**

Definiție: o punte este convergentă dacă se poate aduce la echilibru ($U_d=0$)

Contraexemplu: $Z_{1..3}$ =rezistive, Z_4 =capacitivă; nu se poate echilibra (componenta imaginară a lui U_d va fi $\neq 0$)

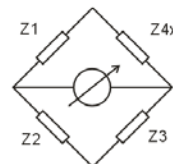
2. condiția de **gradabilitate** a reglajelor

Definiție: o punte este gradabilă dacă cele 2 componente necunoscute ale Z_{4x} se pot grada *independent* în funcție de 2 componente reglabile ale $Z_1 \dots Z_3$

Studiul gradabilității reglajelor

Cond. echilibru: $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_{4x}$

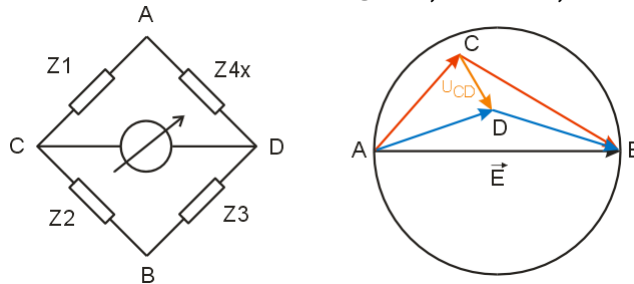
- **Varianta 1:** $Z_{4x} = (Z_1/Z_2)Z_3 = R_{12}Z_3$
s.n. *punte de raport*
 Z_1, Z_2 s.n. *brațe auxiliare*, Z_3 braț etalon
brațele auxiliare sînt *alăturate*
- **Varianta 2:** $Z_{4x} = (Z_1 Z_3)/Z_2 = P_{13}Y_2$
s.n. *punte de produs*
 Z_1, Z_3 s.n. *brațe auxiliare*, Z_2 braț etalon
brațele auxiliare sînt *opuse*



Demonstrăm că, pentru ca puntea să fie gradabilă:

- brațul etalon va fi **complex**
- brațele auxiliare sînt fie **pur reale** fie **pur imaginare**
deci la fel pt. R_{12} sau P_{13} :
 R_{12} sau P_{13} reale: punți de raport/produs real (*în fază*)
 R_{12} sau P_{13} imaginare: punte de raport/produs imaginar (*în cuadratură*)

Studiul convergenței punții



- Echilibrare $\leftrightarrow U_{CD} = 0$; mărimi complexe: reprez. vectorială:

$$\vec{U}_{CD} = 0 \quad \vec{U}_{CD} = \vec{U}_{AD} - \vec{U}_{AC}$$

$$\vec{E} = \vec{U}_{AC} + \vec{U}_{CB} = \vec{U}_{AD} + \vec{U}_{DB}$$
- scop: deplasarea C, D în planul complex a.î. $C \equiv D \leftrightarrow U_{CD} = 0$
- deplasarea C, D \leftrightarrow reglarea celor 2 elem. reglabile
- Q: cum modelăm această deplasare ?
- A: 2 cazuri: în apropierea echilibrului și departe de echilibru

Studiul convergenței punții (cont'd)

- CAZ 1: convergența în apropierea echilibrului
 - notăm a, b cele 2 elemente reglabile:
- $$\frac{U_{CD}}{E} = \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_1 Z_3 - Z_2 Z_4}{(Z_3 + Z_4)(Z_1 + Z_2)} = \frac{P(a, b)}{Q(a, b)}$$
- Condiția de echilibru devine: $P(a, b) \Big|_{a_0, b_0} = 0$
 - În apropierea echilibrului $a \approx a_0, b \approx b_0, P \approx 0, Q \neq 0$
 - Variația U_{CD}/E la variația a sau $b \leftrightarrow$ derivare:

$$\frac{\partial(U_{CD}/E)}{\partial a} = \frac{1}{Q^2} \left(Q \frac{\partial P}{\partial a} - P \frac{\partial Q}{\partial a} \right) \approx \frac{1}{Q} \frac{\partial P}{\partial a} = P_a e^{j\alpha}$$

$$\frac{\partial(U_{CD}/E)}{\partial b} = \frac{1}{Q^2} \left(Q \frac{\partial P}{\partial b} - P \frac{\partial Q}{\partial b} \right) \approx \frac{1}{Q} \frac{\partial P}{\partial b} = P_b e^{j\beta}$$

Studiul convergenței punții (cont'd)

- Unghiul de convergență: $\gamma_c = \beta - \alpha$

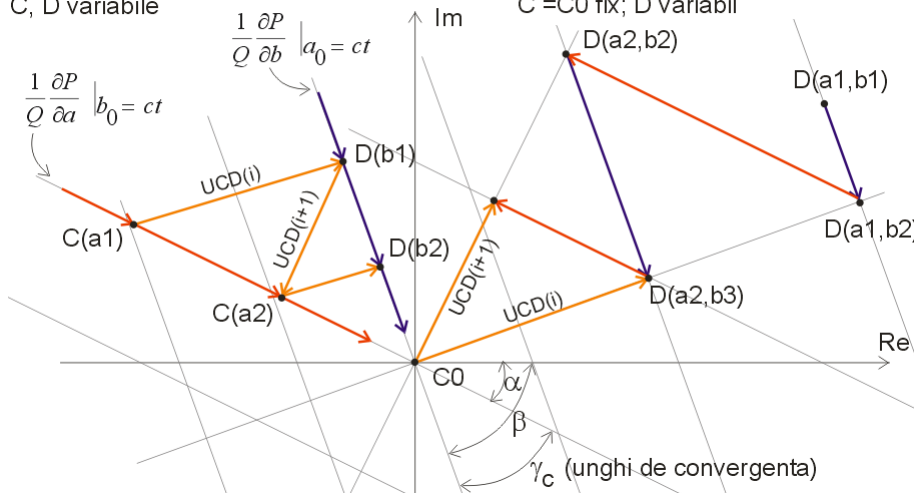
Reprezentare:

- Planul complex: domeniul de variație al U_{CD}
- Originea axelor: a_0, b_0 (echilibru) sau pct. $C_0 \equiv D_0$
- La diferite valori $a = a_0 + k\Delta a, b = b_0 + k\Delta b$ se obțin drepte paralele cu dreptele inițiale → 2 familii de drepte paralele
- 2 variante:
 - Deplasăm C și D, alternativ, pînă ajungem la C_0, D_0
 - Deplasăm D (pînă ajungem la D_0), menținînd fix $C \equiv C_0$

Studiul convergenței punții (cont'd)

Cadranul 2: a, b in brate diferite
C, D variabile

Cadranul 1: a, b in acelasi brat
C = C0 fix; D variabil



- convergența = proces iterativ; Ex: $C(a1) \rightarrow D(b1) \rightarrow C(a2) \rightarrow D(b2)$ etc.
- tipic sînt necesare mai multe manevre

Studiul convergenței punții (cont'd)

- Legătura $\gamma_c \leftrightarrow$ rapiditatea echilibrării (nr. de manevre):

$$U_{CD}(i+1) = U_{CD}(i) \cos \gamma_c$$

după n manevre:

$$U_{CD}(i+n) = U_{CD}(i) (\cos \gamma_c)^n = U_{CD}(i) \cdot 1/m$$

(notăm $(\cos \gamma_c)^n = 1/m$)

deci după n manevre tensiunea de dezechilibru s-a redus de m ori; calc. n :

$$n = \frac{\log m}{\log \frac{1}{\cos \gamma_c}}$$

- OBS: pt $\gamma_c = 90^\circ$ se observă $n=2$

Studiul convergenței punții (cont'd)

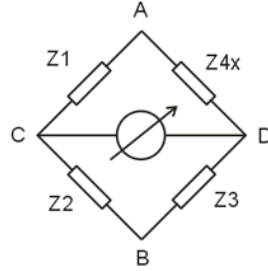
CAZ 2: convergența punții departe de echilibru

- nu se mai poate aproxima deplasarea prin prima derivată
- nu se mai def. 2 elem. reglabile (a,b)
- se def. parametrii generalizați (α, β, γ) din care se vor alege 2 elem. reglabile
- deplasarea pct. C,D nu se mai face pe drepte ci pe arce de cerc (dreapta = aproximare a arcei de cerc în apropierea originii)

Studiul convergenței punții (cont'd)

Convergența punții departe de echilibru

Q: pentru puntea ABCD, care sînt combinațiile posibile de cîte 2 brațe (ACB și ADB) ? identificăm param. generalizați în aceste combinații

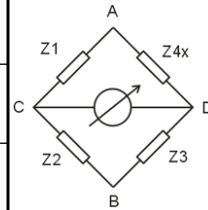


A: 6 combinații (fără a ține seama de ordinea celor 2 brațe), întrucît din considerente de gradabilitate, 2 brațe trebuie să fie elemente pure (R sau C). Combinațiile sînt prezentate în tabelul următor

parametrii generalizați (α, β, γ) se iau Z pentru modelul serie și Y pentru paralel

Studiul convergenței punții (cont'd)

	Brațe ACB sau ADB	unghi(U_{CA}, U_{BA})	α	β	γ
1		+	R_1	R_2	$1/\omega C$
2		-	$1/\omega C_1$	$1/\omega C_2$	R
3		-	$1/R_2$	$1/R_1$	ωC
4		+	ωC_2	ωC_1	$1/R_1$
1'		-	R_1	R_2	ωL
3'		+	$1/R_2$	$1/R_1$	$1/\omega L$



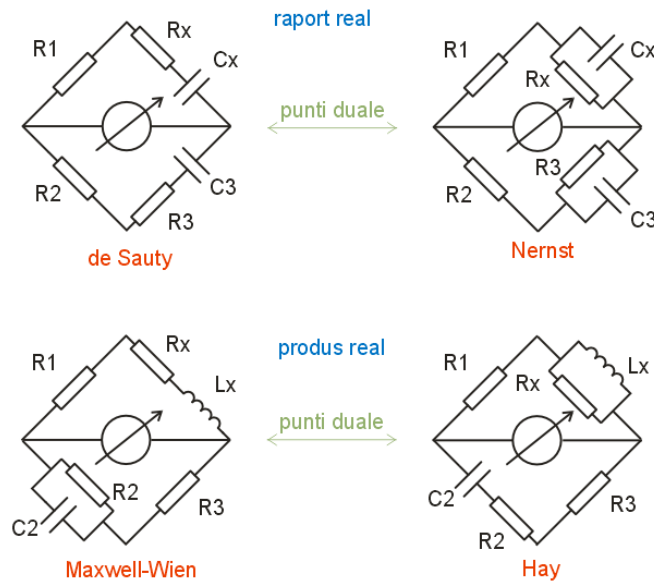
Notaiii: α elementul singur într-un braț (braț auxiliar)
 β elementul de aceeași natură cu α , în brațul etalon
 γ elementul de natură diferită de α , în brațul etalon

OBS: Nu există 2', 4' deoarece nu există L pur

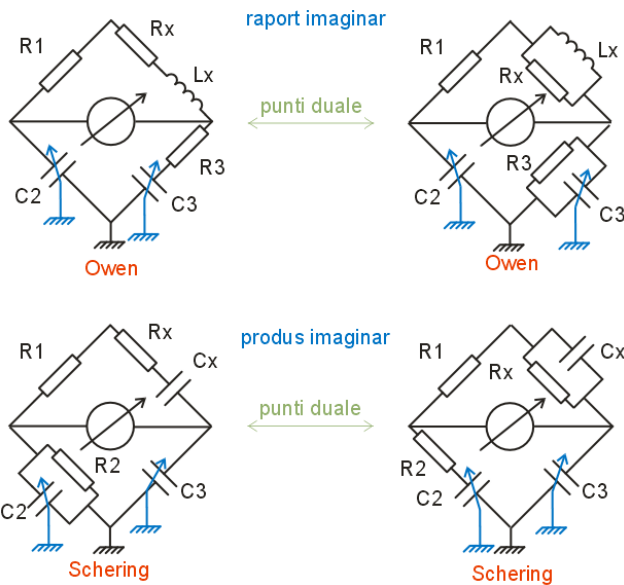
Studiul convergenței punții (cont'd)

- **punte convergentă:**
legarea $A=A$, $B=B$ pentru 2 seturi de brațe cu același semn de unghi sau $A=B$, $B=A$ pentru seturi cu semne opuse
- **punte neconvergentă:**
invers față de cazul precedent
- **Combinății convergente din tabel:**
 - 8 punți, studiate în continuare
 - pentru fiecare punte se aleg 2 elem reglabile: mai multe combinații posibile; alegem (α, β) sau (β, γ)
- **Q: determinați, pentru fiecare punte, relațiile de echilibru și alegerea elementelor reglabile (cîte 2 variante)**

Structuri de punți convergente, în fază



Structuri de punți convergente, în cuadratură



OBS: posibilitatea de a lucra în IF ↔ alegerea el. regl. C, cu cursorii la masă

Punți convergente: concluzii

- **Gradarea carteziană (β, γ) :**
 - reglaje pt. partea reală și imaginară a Z_x / Y_x
 - ω nu intervine în relația de gradare
 - precisă (unghi de convergență 90°)
 - elementele reglabile în același braț (brațul etalon)
 - elementele reglabile de naturi diferite → constructiv mai scump
- **Gradarea mixtă (α, β) :**
 - reglaje pt. partea imaginară a Z_x / Y_x și Q_x / D_x
 - ω intervine în relația de gradare
 - mai puțin precisă (unghi de convergență $< 90^\circ$)
 - elementele reglabile în brațe diferite
 - elementele reglabile de aceeași natură → constructiv mai ieftin
 - s.n. și gradare industrială
- **Necesitatea punților duale:**
 - o singură punte nu poate măsura Q/D de la 0 la ∞

Observații și concluzii punți de c.a

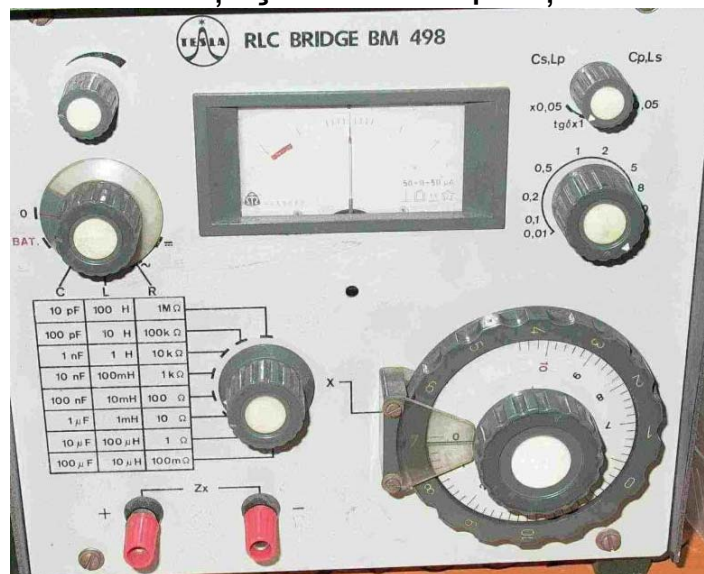
- Gradarea indep. de frecvență
 - posibilă doar la gradarea (β, γ)
 - avantaje: **frecvența** semnalului nu trebuie cunoscută/controlată precis; mai mult, nici **forma** semnalului nu e critică

Q: ce legătură are forma semnalului ?

A: formă nesinusoidală → armonici → pentru fiecare frecvență armonică relația de gradare este alta!

- Constructiv: 4 tipuri de punți se combină într-un singur aparat, a.î. se poate măsura orice natură (R,L,C) și orice valoare Q/D

Observații și concluzii punți de c.a



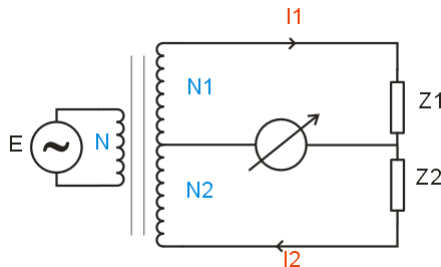
- Exemplu de punte manuală de c.a. – 4 tipuri într-un singur aparat
- comparați cu puntea automată din laborator !

Sensibilitatea punților de c.a

- memento: $S_{P.CC} = 1/4$
- la punțile de c.a. depinde de tip.
- interesează $|S|$ căci IN nu e sensibil la faza tensiunii
 - raport real: idem c.c., A real
$$|S_{\max}| = 1/4 \text{ pt. } A=1$$
 - raport imaginar: $A=jA_0$, A_0 real
$$|S_{\max}| = 1/2 \text{ pt. } A_0=1$$
 - produs: P fix, A complex și variabil = $A_0 e^{j\varphi}$
$$|S_{\max}| = 1/2(1 + \cos\varphi) \text{ pt } A_0=1$$
$$\varphi = 0 \rightarrow |S_{\max}| = 1/4$$
$$\varphi = \pi/2 \rightarrow |S_{\max}| = 1/2$$

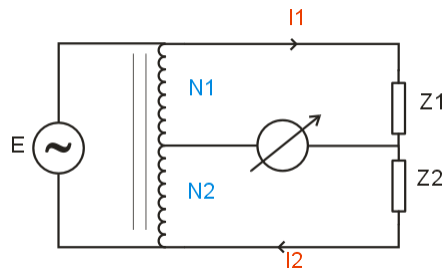
Demonstrație!

Punți cu transformator



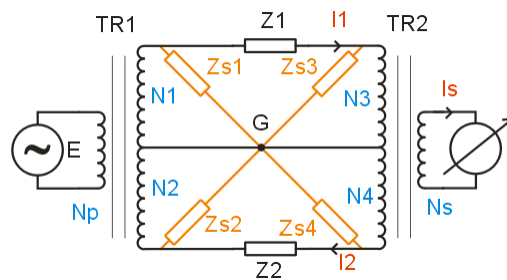
- Relația de echilibru: $Z_1/Z_2 = N_1/N_2$
- Q1: Avantaje transformator ?
- Q2: Dezavantaje transformator ?

Punți cu transformator



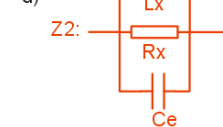
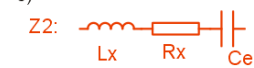
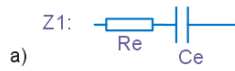
- Înlocuim transformatorul cu autotransformator
- Q: Dezavantaje autotransformator ?

Punți cu transformator



- punte pentru Z medii/mari (cu gardă)
- Q: cum se elimină efectul impedențelor de scurgere?
- Relația de echilibru: $Z_1/Z_2 = (N_1 N_3)/(N_2 N_4)$

Punți cu transformator



deducem relațiile
de echilibru și
de gradare !

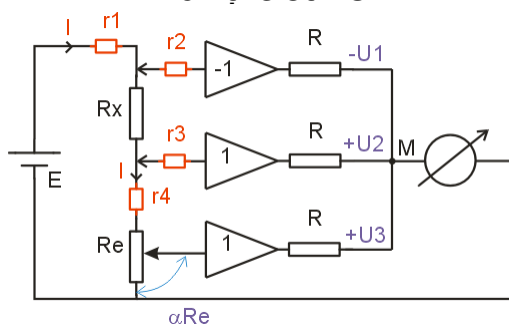
OBS: gradarea L_x
depinde de
frecvență !

- Punțile cu trafo. ↔ punți de raport real ↔ aceeași natură
- Ca și la p.c.a. clasice, nu există L_e ;
- **Q: înseamnă că nu putem măsura L_x ?**
- Conectarea Z_1, Z_2 de pînă acum fct. de natura/modelul lor:
 - a) capacitiv/serie b) capacitiv/paralel
 - c) inductiv/serie c) inductiv/paralel

Punți active

- elimină dezavantajele transformatoarelor
- mai ieftine la aceeași precizie (sau mai bună)
- posibilități de automatizare
- pot folosi element de referință C pentru măsurarea L
- folosesc componente active

Punți active

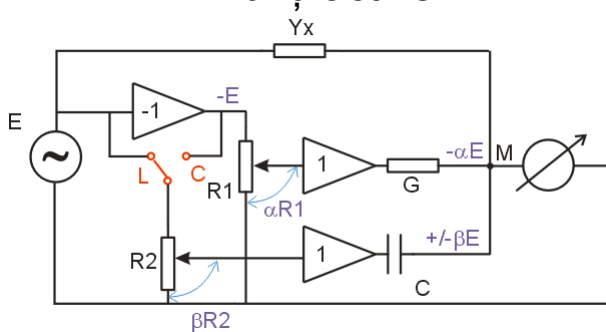


Puntea LOGAN pentru impedanțe mici

= buffer (amplificator repetor pt +1 sau inversor pt -1)
 rol: impedanță mare de intrare și mică de ieșire (sursă ideală de tensiune); izolează R_x , R_e de partea dreaptă a schemei

Relația de gradare: $R_x = \alpha R_e$

Punți active



Puntea pentru admitanțe

Relații de gradare:

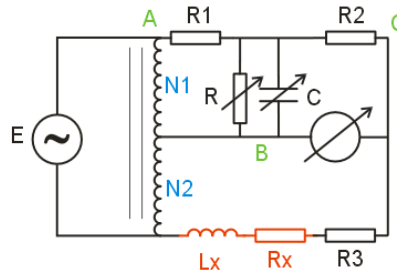
“C”: $G_x = \alpha G$ $C_x = \beta C$

“L”: $G_x = \alpha G$ $L_x = 1/(\omega^2 \beta C)$,

Avantaj: măsurarea L folosind C etalon

Aplicații punți

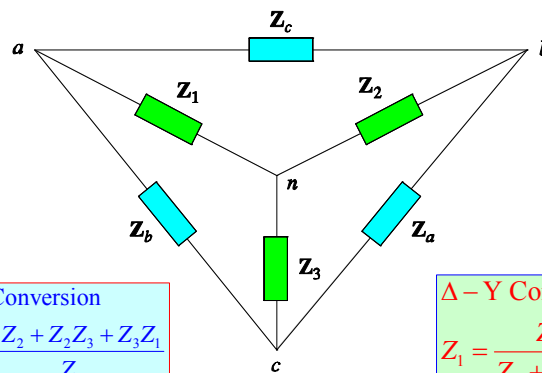
Puntea cu un braț în "T"



- Determinați condițiile de echilibru și elementele reglabile în cazurile gradării carteziene și mixte
- Care este rolul R_3 ?

Aplicații punți

Indicație (puntea cu un braț în "T") → transformăm Y în Δ



Y - Δ Conversion

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1}$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3}$$

Δ - Y Conversion

$$Z_1 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

$$Z_3 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}$$